

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CELEBRAZIONI LINCEE

85

GIOVANNI RICCI

DISCORSO COMMEMORATIVO PRONUNCIATO DAL LINCEO

GIOVANNI SANSONE

NELLA SEDUTA ORDINARIA DEL 14 NOVEMBRE 1974



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1975



Giovanni Ricci

GIOVANNI SANSONE

VITA ED OPERA SCIENTIFICA DI GIOVANNI RICCI

(Firenze 17 agosto 1904 - Milano 9 settembre 1973)

È ben raro che l'onore e l'onere della rievocazione di un Socio dell'Accademia siano assegnati a chi, come me, trovasi sul ramo discendente della parabola della sua vita terrena, mentre è nell'ordine naturale che i giovani ricordino gli anziani, e dell'inversione di questa consuetudine ne dirò ora la ragione.

Nel marzo 1919, ritornato a Firenze dopo il mio servizio di guerra, durato quattro anni, io ripresi subito il mio insegnamento nell'Istituto Tecnico Galileo Galilei di Firenze, e nella seconda classe della sezione fisico-matematica (ora Liceo Scientifico) io ebbi tra i miei discepoli *Giovanni Ricci*.

Volendo imprimere al mio insegnamento un carattere spiccatamente formativo io premisi al mio corso di algebra elementare un gruppo di lezioni sui numeri reali partendo dalle coppie di classi contigue di numeri razionali, estendendo poi lo stesso concetto alle coppie di classi contigue di grandezze archimedee; tali scelte mi permettevano poi di procedere correttamente e speditamente nei miei programmi di insegnamento.

Come è noto i giovani, qualunque sia la via scelta per l'introduzione dei numeri reali trovano difficoltà a familiarizzarsi col nuovo ente, e nelle interrogazioni dei miei scolari, dirette ad assicurarmi come era stato appreso il mio insegnamento si distinse subito un giovinetto quindicenne, *Giovanni Ricci*, che con grande chiarezza e precisione rispose alle mie domande.

Il *Ricci* seguì poi per tre anni il mio insegnamento elementare ed io ebbi spesso occasione di osservare che Egli aveva la stoffa per dedicarsi in seguito agli studi di matematica pura.

Per facilitare la Sua ascesa io lo consigliai in varie occasioni a prepararsi per l'esame di ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa.

Conseguita nel 1921 la licenza d'onore dell'Istituto Tecnico *Egli* sostenne nell'autunno il concorso alla Normale; dichiarato primo vincitore entrò con entusiasmo nel Palazzo dei Cavalieri.

Fra i Suoi Maestri Egli ebbe *Luigi Bianchi*, *Onorato Nicoletti*, *Carlo Rosati*, *Eugenio Bertini* e seguì anche per un anno un corso sulle Funzioni di variabile reale e sulle serie di Fourier di *Mauro Picone* allora professore della Sapienza pisana.

È nota la grande attrazione che per quasi cinquant'anni suscitò tra i suoi scolari *Luigi Bianchi* che alternava i suoi famosi corsi di Geometria differenziale con la teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, colle equazioni differenziali ordinarie sia nel campo reale che nel campo complesso, colle equazioni alle derivate parziali, con i gruppi continui, con la teoria dei numeri, con la teoria dei gruppi finiti, con la teoria delle forme aritmetiche quadratiche, e *Giovanni Ricci* ebbe nel 1925 da questo Suo maestro una tesi di geometria differenziale sulle trasformazioni di *Christoffel* e di *Darboux* e su alcune classi di superficie generate col rotolamento.

L'argomento della tesi era allora attuale; i geometri, particolarmente quelli della mia generazione, ricordano infatti il ruolo preminente che nella geometria differenziale hanno i vari metodi di trasformazione: sono classici quelli del *Bianchi*, di *Bäcklund*, di *Christoffel*, di *Darboux*, di *Ribaucour*, trasformazioni che conducono con metodi geometrici all'integrazione di particolari classi di equazioni alle derivate parziali. Con tali metodi nota una soluzione se ne costruiscono altre dipendenti da un numero grande a piacere di costanti arbitrarie e si risolvono quindi problemi pertinenti l'analisi ricorrendo essenzialmente all'intuizione geometrica.

Il *Ricci* conseguì nella Sua tesi pregevoli risultati particolarmente per le superficie isotermitiche e la tesi discussa il 15 dicembre 1925 fu approvata con lode e con la stampa negli « Annali della Scuola Normale ».

Il *Ricci* ritornò alle Sue ricerche di geometria differenziale altre due volte.

Nel 1934 comparve nel « Giornale di Matematica di Battaglini » una Sua ricerca colla quale si perviene ad una proprietà caratteristica delle congruenze di *Ribaucour*. Di questa ricerca Egli aveva dato un sommario al Congresso matematico di Zurigo del 1932; il Nostro scoprì che per queste congruenze deve sussistere una relazione fissa tra i raggi principali di curvatura delle loro due falde.

Una seconda ricerca pubblicata negli « Atti dell'Istituto Veneto » del 1933-34 caratterizza le congruenze di sfere sulle quali per qualunque flessione della superficie S dei centri esiste un doppio sistema di linee, fisso su S alle quali corrispondono sulle due falde dell'inviluppo doppi sistemi di linee le quali formino angoli uguali in punti corrispondenti.

Il *Ricci* non si occupò più di problemi di geometria differenziale metrica; i successori del *Bianchi*: *Guido Fubini*, *Enrico Bompiani* col suo scolaro *Enea Bortolotti*, *Alessandro Terracini* con le loro ricerche di geometria differenziale proiettiva fecero progredire un nuovo ramo della matematica.

Il *Ricci* conseguì la laurea, nel gennaio 1926, si trasferì all'Università di Roma con la qualifica di coadiutore alla cattedra di analisi superiore di *Giuseppe Bagnera* e di Geometria superiore di *Federigo Enriques* e nel periodo febbraio-settembre 1926 ebbe successivamente la qualifica di assistente di ruolo delle stesse cattedre.

Il *Ricci* fu felice di questa nomina nella Scuola matematica di Roma diretta in quel tempo da *Vito Volterra*, *Guido Castelnuovo*, *Federigo Enriques*, *Francesco Severi*, *Giuseppe Bagnera*, *Enrico Bompiani*.

Il *Ricci* seguì le « Lezioni sopra la teoria delle funzioni analitiche » di *Giuseppe Bagnera*, matematico noto per la precisione e la concisione delle sue lezioni. Per la prematura morte del Bagnera, avvenuta il 12 maggio 1927, il *Ricci* ne continuò il corso e portò a compimento con aggiunte la stampa delle « Lezioni » che furono molto apprezzate e che si esaurirono in breve lasso di tempo. Il corso di *Bagnera-Ricci* ancora oggi rappresenta un'ottima introduzione ai trattati sulle funzioni di una variabile complessa.

Nell'agosto 1927 fu chiamato a compiere il Suo servizio militare di leva; dall'agosto 1927 all'ottobre 1928 Egli frequentò un corso allievi ufficiali di complemento di artiglieria e conseguì il grado di sottotenente.

Ritornato alla vita borghese, molto soddisfatto delle Sue esperienze militari il *Ricci*, come dirò tra poco, avrebbe dovuto prendere l'insegnamento di matematica e fisica nell'Istituto Tecnico di Padova.

Il *Ricci*, nel 1927, durante il secondo anno del Suo assistentato romano si pose, come fanno del resto tutti i giovani, il problema del Suo avvenire. Egli notò che l'accesso alla cattedra universitaria non era facile, nè era sempre sicuro il successo. L'età per conseguire la « baronia » aveva allora come media trentacinque anni, e potevano anche verificarsi fenomeni come quello accaduto a *Giuseppe Vitali* (1875-1932) che ebbe la cattedra a quarantasette anni, mentre il Vitali per le sue geniali e fondamentali scoperte è considerato come uno dei più forti analisti della sua generazione.

Limitandomi al campo matematico, per alcuni giovani il passaggio temporaneo nell'insegnamento medio apriva una valvola di sicurezza e il *Ricci* decise di presentarsi ai concorsi per le scuole medie.

Nel maggio 1927 Egli riuscì secondo vincitore con punti 88.8/100 nel concorso generale a cattedre di matematica e fisica negli Istituti medi di istruzione statali e secondo vincitore ex-equo col primo con punti 83/100 nei concorsi speciali e per effetto di questo secondo concorso Egli fu assegnato all'Istituto Tecnico di Padova.

Come prima ho detto Egli avrebbe dovuto assumere il Suo insegnamento a Padova dopo il congedo dal servizio militare ma nel frattempo si verificò un avvenimento che incise in modo determinante sulla carriera accademica del *Ricci*.

Onorato Nicoletti, uno dei miei amati maestri pisani, divenuto poi mio carissimo amico, conoscendo i rapporti che mi legavano al *Ricci* mi incaricò di interpellarlo per conoscere se avesse gradito la Sua nomina a professore interno della Normale.

Il *Ricci* senza esitazione mi diede il Suo consenso e col primo novembre 1928 Egli prese il posto che per moltissimi anni aveva tenuto *Luigi Bianchi* e ne continuò fino al 1935 l'insegnamento con i due corsi di Teoria dei numeri e di Teoria dei gruppi finiti e della risoluzione dell'equazioni algebriche secondo *Galois*, corsi che in passato avevano orientato alcuni normalisti come *Michele Cipolla* e *Gaetano Scorza* a dedicarsi con grande prestigio agli studi algebrici.

Nel 1930 *Giovanni Gentile* direttore della Normale, chiamò come direttore degli studi scientifici *Leonida Tonelli* e il *Ricci* venne incontro alle esigenze

del Tonelli aggiungendo al Suo insegnamento alcuni capitoli della Teoria degli insiemi.

Fra gli scolari del *Ricci* alla Normale io voglio ricordare *Guido Zappa* divenuto un noto gruppista e capo di una fiorente scuola di algebristi.

Nel periodo 1930-35 il *Ricci* assisteva ai famosi seminari Tonelliani di Analisi nei quali si formarono *Basilio Manià*, *Silvio Cinquini*, *Lamberto Cesari*, *Luigi Amerio*, *Sandro Faedo*, *Adolfo Del Chiaro*, *Landolino Giuliano*, *Emilio Bajada*, e il *Ricci* ne trasse giovamento estendendo il campo delle sue attività di ricerca.

Nel 1932 *Egli* pubblicò una memoria sulla convergenza assoluta delle serie trigonometriche individuando delle serie che ammettono al più un numero finito di punti di convergenza assoluta; in un'altra memoria del 1932 *Egli* approfondì il delicato problema della moltiplicazione di due serie secondo *Cauchy*, ottenendo un generale criterio sufficiente da cui derivano subito come corollari moltissimi dei criteri classici e caratteristici sulla moltiplicazione delle serie e da cui se ne possono ricavare dei nuovi sempre abbastanza espressivi; nel 1934-35 per una funzione definita nel semiasse positivo *Egli* introdusse la « nozione di scarto tauberiano superiore e inferiore » e nella *Sua* memoria « Teoremi tauberiani » trovò condizioni sufficienti per l'inversione di un classico teorema relativo alla trasformazione di *Laplace-Abel*; nel 1936 per una formula di *K. Petr* relativa al calcolo di integrali definiti *Egli* ne stabilì la validità nelle minime condizioni che permettono di scriverla.

Un campo notevole di ricerche che ha dato fama al *Nostro* verte sulla Teoria dei Numeri, campo che faceva spesso oggetto di conversazione tra *Ricci* e me.

Entrambi avevamo studiato le « Lezioni sulla Teoria delle forme aritmetiche binarie e ternarie » del *Bianchi*, del 1911 e così pure le « Lezioni sulla Teoria dei numeri algebrici » del *Bianchi* del 1923, e il *Ricci* volendo penetrare nel vivo della Teoria dei numeri autonomamente e coraggiosamente studiò e meditò sui celebri volumi di *E. Landau* « Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen » (Leipzig, 1929) e sulle « Vorlesungen über Zahlentheorie » (Leipzig, 1927).

Nel primo gruppo di ricerche del *Ricci* di Teoria dei numeri « istituzionale » si trovano: due note del 1930 sulle somme delle potenze simili degli interi naturali e sui coefficienti del fattoriale; una semplice ed elegantissima dimostrazione del teorema di *Staudt-Clausen* sui numeri di *Bernoulli*; due note del 1931 nelle quali il *Ricci* partendo da un Suo studio sulle funzioni simmetriche delle radici dell'unità secondo un modulo composto generalizza ampiamente il teorema di *Wilson-Glaisher*.

Nel 1933 comparve una prima nota con una limitazione asintotica del massimo divisore primo del prodotto $F(a)F(a^2)\dots F(a^n)$, dove a ed x sono interi ed $F(a)$ è un polinomio irriducibile di grado $n \geq 1$; nel periodo 1933-34 comparvero due note nelle quali con mezzi semplici si danno casi di validità del classico teorema di *Dirichlet* sull'infinità di numeri primi appartenenti

ad una progressione aritmetica $ax + b$, a e b primi tra loro, e una nota nella quale venne migliorata una formola di *T. Nagel*.

In due belle memorie pubblicate nel 1933-34 nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » sono analizzate le proprietà aritmetiche della successione $F(1), F(2), F(3), \dots$ per ciò che riguarda la decomposizione in fattori primi dei suoi elementi.

Nella prima memoria il Nostro migliora due limitazioni di *T. Nagel* e *T. Estermann*; perfezionando poi un classico metodo di *Viggo Brun* inteso a valutare asintoticamente il numero degli elementi residui di una progressione aritmetica quando si operi in essa con uno o più crivelli di *Eratostene*, migliora un teorema di *T. Estermann* sul limite superiore dei fattori primi distinti che compaiono in $F(x)$ e sul numero di volte che ciascun fattore primo può essere ripetuto.

Nella seconda memoria estendendo un procedimento di *E. Westzynthius* realizza un vero progresso per alcune formule asintotiche in quanto sono meglio precisati rispetto a quanto era noto gli ordini di grandezza di alcuni termini che in esse figurano.

A queste due memorie si accompagna una nota del *Ricci* pubblicata nel « Tôhoku Mathematical Journal » sull'aritmetica additiva degli interi liberi di potenze.

Passo ora a dare una breve scorsa alle ricerche più elevate e più vive del Nostro e di cui Egli fu sempre intimamente soddisfatto.

Al Congresso internazionale matematico di Parigi del 1900, *David Hilbert*, in una celebre conferenza enunciò 23 problemi per le matematiche future, e uno di questi, il settimo, riguardava la trascendenza dei numeri ξ^η con ξ ed η numeri algebrici. Una risposta a questo problema fu data da *A. Gelfond* che dimostrò in maniera agile e brillante che se ξ è algebrico, $\xi \neq 1$, ed η è algebrico irrazionale, ξ^η è un numero trascendente.

Il *Ricci* con una Sua memoria del 1935, inserita nella seconda serie degli « Annali della Scuola Normale » riassunta nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (U.M.I.) del 1935 e con l'uso della formola di interpolazione di *Hermite* trova con un numero finito di ingegnosi « piccoli passi » nuove classi di numeri trascendenti, classi che hanno la potenza del continuo nel caso che ξ ed η (η irrazionale) siano approssimabili con numeri algebrici, ed esprime la congettura che ξ^η è trascendente se ξ ed η sono numeri trascendenti di *Liouville*.

Nel 1937 comparvero nella seconda serie degli « Annali della Scuola Normale » due notevoli memorie del Nostro « Su la congettura di *Goldbach* e la costante di *Schnirelmann* ».

Per la storia ricordo che l'oggetto delle due memorie si collega ad una congettura di *Chr. Goldbach* che nella sua corrispondenza con *Eulero* del 1749 afferma che ogni numero intero pari può sempre esprimersi come la somma di due numeri primi dispari.

Le prime risposte a questa congettura sono venute dopo quasi due secoli: *L. Schnirelmann* nel 1930 trovava che a partire da un n_0 sufficientemente

grande ogni intero maggiore di n_0 è la somma di non più i 800.000 numeri primi; questo limite era ridotto a 2208 da *N. P. Romanoff* nel 1935, e a 71 da *H. Heilbronn - E. Landau - P. Scherk* nel 1936.

Su queste ricerche si inserisce *Giovanni Ricci* che precisando proposizioni note e restringendo per certe costanti i confini preesistenti, dimostra che ogni intero pari sufficientemente grande si può rappresentare con la somma di non più di 67 numeri primi, e di questo risultato il Nostro fu giustamente orgoglioso.

È noto che nel 1937 *I. M. Vinogradoff* con un nuovo e geniale metodo di ricerca dimostrò l'esistenza di un numero n_0 sufficientemente grande per il quale vale la congettura di *Goldbach* che nella letteratura matematica chiamasi ora congettura di *Goldbach-Vinogradoff*; ma quale sia il valore di n_0 non è ancora noto.

Mi piace ricordare che la nostra Accademia nel 1968 nominò socio straniero il *Vinogradoff* caratterizzandolo come famoso studioso di Teoria dei numeri.

Un terzo problema, molto arduo, che appassionò ed occupò il *Ricci* in tempi diversi fu quello dei numeri primi gemelli cioè dei numeri primi la cui differenza è 2: 3,5, 5,7, 11,13, 17,19, 29,31, ...

Non è ancora noto se questi numeri siano o no in numero finito e un teorema di *Viggo Brun* del 1919 assicura che se essi sono in numero infinito la serie formata dai loro inversi $1/3 + 1/5 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + \dots$ è convergente, ossia se le coppie di numeri primi gemelli fossero in numero infinito esse sono rare, mentre la somma degli inversi di tutti i numeri primi per un teorema di *Eulero* è divergente.

Significative estensioni del Teorema di *Viggo Brun* trovansi in una memoria del *Ricci* pubblicata nel 1932-33 negli «Annali di Matematica» di cui ricordo la più semplice: se esistono infiniti numeri primi p, p' per quali $p = an + b, p' = a'n + b'$, (a, a', b, b' fissi) allora la serie

$$\sum_{p, p'} \frac{\log^{1-\varepsilon} p}{p} + \frac{\log^{1-\varepsilon} p'}{p'}, \quad \varepsilon \text{ arbitrario}$$

è convergente.

Sulla frequenza dei numeri primi il *Nostro* deve avere lungamente pensato, e dopo quasi un ventennio ricominciò a far noti i risultati delle Sue meditazioni.

Viggo Brun insieme alle coppie di numeri primi gemelli aveva studiato per un fissato intero a maggiore di 1 il numero $Z_j(\xi; x)$ delle coppie di numeri primi p_i, p'_i tali che

$$p_i - p'_i = 2a, \quad (1 - \vartheta)\xi < p_i \leq \xi, \quad 2a < \delta\xi$$

e per $\xi > \xi_0(\delta)$ abbastanza grande aveva trovato la limitazione

$$Z_j(\xi, 2a) < c \prod_{\xi \leq p/a} \frac{p-1}{p-2} \frac{\delta\xi}{\log^2 \xi},$$

dove c è una costante. La ricerca del migliore valore di c , o come dice il *Ricci* del «coefficiente di *Viggo Brun*» fece scoprire al *Nostro*, in una Sua memoria

del 1953, pubblicata negli «Annali della Scuola Normale» una notevole limitazione di ϵ .

Una seconda memoria del 1954 inserita nella «Rivista matematica dell'Università di Parma» verte sull'andamento della differenza di due numeri primi consecutivi.

Con l'introduzione di tre nuovi concetti «densità asintotica nulla» per una successione di numeri positivi, di *quasi asintoticità* per una successione di numeri reali positivi, di «*pennello di quasi asintoticità*» di una successione $\{x_n\}$ rispetto ad una successione di coppie (a_n, b_n) il Ricci trovò che per la complicata successione delle differenze $p_{n+1} - p_n$ esistono due costanti $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha < \beta < \infty$ univocamente determinate tali che

$$p_{n+1} - p_n \sim (\alpha \log p_n, \beta \log p_n).$$

Ricordo che questa ricerca esposta dal Ricci al Congresso internazionale di matematica di Amsterdam, del settembre 1955, riscosse una calorosa approvazione.

Nel 1955, ancora nella «Rivista matematica dell'Università di Parma», il Ricci prese in esame la successione dei rapporti ρ_n tra la differenza $p_{n+1} - p_n$ di due numeri primi consecutivi e $\log n$ e per l'insieme dei valori di accumulazione della successione $\{\rho_n\}$ il Ricci valendosi dei risultati da Lui conseguiti in precedenti ricerche giunse ad alcuni teoremi più stringenti di quelli ottenuti in precedenza da *Westzynthius* (1911), *R. A. Rankin* (1947), *P. Erdős* (1955).

Il metodo e il risultato di questa Sua ricerca fecero oggetto di una Sua conferenza in un Colloquio sulla Teoria dei numeri tenuto a Bruxelles nel 1955.

Concludo questi rapidi cenni sulle ricerche di Teoria dei numeri del Ricci riportando il giudizio della nostra Accademia per la Sua nomina a Socio corrispondente: «Il Ricci è il rappresentante in Italia di uno degli indirizzi più aristocratici della matematica, la Teoria dei numeri; ne ha analizzato con penetrante tenacia alcuni fra i più difficili problemi impiegando metodi elevati dell'analisi moderna ed ha conseguito, anche con tecniche nuove, risultati precisi e notevoli».

Nel periodo 1954-57, il Ricci pubblicò un terzo gruppo di memorie e note sugli elementi analitici e precisamente sulle serie di potenze aventi un raggio di convergenza finito e non nullo, trovando nuovi e importanti risultati. Molto probabilmente queste ricerche si attaccarono a qualcuno dei suoi corsi sulle funzioni analitiche e da queste Sue ricerche prese l'avvio la Sua scolara *Delfina Roux* che ha lavorato lungamente e con successo nel campo delle funzioni analitiche.

Il Ricci preannunciò le Sue ricerche nel 1954 in una conferenza tenuta al Seminario matematico di Catania e nello stesso anno in una Nota del «Bollettino dell'UMI» diede condizioni più generali di quelle di *G. Vivanti* e *A. Pringsheim* per caratterizzare un punto critico sulla circonferenza di convergenza, e così pure condizioni più generali di quelle già ottenute da *E. Fabry*, *F. Lorch*, *H. Claus* sul teorema di *J. Hadamard* sulla non prolungabilità di ampie classi di elementi analitici.

Sempre nel 1954 in una breve nota del « Giornale di Matematica del Bat-tagliani » il Ricci diede una dimostrazione semplice ed elementare sulla struttura dell'insieme degli elementi analitici non prolungabili.

In due ricerche, una del 1954 inserita negli « Annali della Scuola Normale » e l'altra del 1957 inserita nel volume « Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani » il Ricci generalizzando risultati di *P. Fatou-M. Riesz* studiò il resto delle serie di potenze nei punti regolari e non regolari della circonferenza di convergenza.

Altri due nuovi criteri sufficienti relativi alla localizzazione di un punto singolare sulla circonferenza di convergenza trovansi in una nota dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del 1955.

In una Nota dei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » del 1955 e in una memoria dello stesso anno inserita nei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni » sono contenute alcune Sue indagini sui due fenomeni della prolungabilità e dell'ultra convergenza delle serie di potenze.

Una Nota inserita nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » e una Nota inserita nei « Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni » del 1955 trattano l'ultra convergenza di un elemento analitico connessa con una successione di lacune dei coefficienti dell'elemento stesso, cioè di tratti abbastanza grandi nei quali i coefficienti dell'elemento sono nulli oppure abbastanza piccoli. Il Ricci riprendendo i risultati di altri autori e introducendo i due concetti di lacunarità secondo *J. Hadamard-A. Ostrowski* e secondo *E. Fabry-G.P. Polya* dimostra vari teoremi sulle serie di potenze prolungabili e ultra convergenti.

Ancora nel 1955 il Ricci dedicò tre Note, pubblicate rispettivamente nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » negli « Annali di Matematica » e nel « Bollettino dell'UMI » relativamente al confronto tra la funzione maggiorante $\mathcal{M}(f, r)$ e la media quadratica $M_2(f, r)$ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ convergente per $|z| \leq r$. Alcuni teoremi di confronto tra la funzione maggiorante $\mathcal{M}(f, r)$ e il massimo modulo $M(f, r)$ di una serie di potenze convergente per $|z| \leq r$ erano stati ottenuti da *M. Bohr, M. Riesz, I. Schur, F. Wiener*, e il Ricci trovò proposizioni analoghe per il Suo problema. Stabilita l'esistenza di una costante γ che permette il confronto tra $M(f, \gamma r)$ e $M_2(f, r)$, in alcuni casi viene anche determinato il minimo di γ o come si dice la migliore costante.

Riassumendo il Ricci unificò e approfondì i risultati fino allora ottenuti sul comportamento degli elementi analitici sulla corrispondente circonferenza di convergenza, e nel Suo indirizzo, come ho già detto, si collocò la Sua scolara *Delfina Roux*, da tempo docente di analisi matematica nella Facoltà di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali dell'Università di Milano.

Mi sono soffermato finora sulla produzione scientifica del Ricci nel campo della Geometria differenziale metrica, delle Funzioni di variabile complessa e soprattutto nella Teoria dei numeri, ma per luneggiare la Sua vasta e raffinata cultura giova anche ricordare altre Sue attività.

Nel 1961 nel Suo discorso inaugurale dell'anno accademico dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere «Momenti decisivi del pensiero matematico degli ultimi due secoli» si trova una mirabile sintesi dello sviluppo della matematica che così si conclude «Ebbene, nel progresso della Scienza della Natura aleggia il pensiero matematico che lo accompagna, lo precede, talvolta lo segue per poi sopravanzarlo: aleggia su quel progresso come soccorritore corroborante per consolidare posizioni ancora instabilmente raggiunte, catalizzatore e guida instancabile a suscitare nuovi orientamenti, conciliatore volto a raggiungere momenti di sintesi nelle dialettiche interne, richiamo fedele all'onestà degli intenti e alla serietà dei propositi, moderatore sensibile ai limiti fra la scienza e la metafisica».

Ricorderò anche che nel discorso inaugurale tenuto dal *Nostro* al settimo Congresso dell'UMI del 1963 a Genova «Il pensiero matematico nel mondo di oggi» Egli si soffermò su alcuni aspetti della scienza matematica per dimostrare che questa si trova «ogni volta si cerchino le ragioni intime e sostanziali dei fenomeni osservati, dei risultati di esperienze compiute, del successo di imprese scientifiche organizzate».

Delle pubblicazioni del *Ricci* sulla storia della matematica italiana io ricorderò «il contributo italiano al progresso della analisi negli ultimi cento anni 1839-1939», pubblicato nel 1939 dalla «Società Italiana per il progresso delle scienze, rapporto estremamente preciso e completo e ricorderò pure la conferenza «La scuola matematica pisana dal 1848 al 1948» letta a Pisa nel 1948 al Congresso dell'UMI e il Suo discorso letto pure a Pisa all'Assemblea dei normalisti dell'otto aprile 1971 «sull'opera matematica dei normalisti a partire dal 1847» di cui finora non è stato possibile reperire il manoscritto.

Gli ora ricordati contributi del *Ricci* sull'opera dei matematici italiani, la bibliografia dei matematici italiani del primo secolo dello Stato unitario del collega *G. F. Tricomi* e le introduzioni storico-critiche premesse ai volumi pubblicati dalla nostra Accademia e alla collezione UMI dei grandi matematici italiani saranno preziosi per chi vorrà in avvenire scrivere la storia della matematica dal Risorgimento ad oggi.

Tralascio di parlare di una conferenza molto orientativa per il momento in cui fu letta «Figure, Reticoli e computi dei Nodi» inserita nel vol. 19 (1948) dei «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano», della collaborazione tecnica data dal *Ricci* alla Enciclopedia Italiana *Treccani*, all'Enciclopedia della Scienza e della Tecnica di Mondadori e all'Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche di Sansoni, al Repertorio Matematico di M. Villa; tutte queste pubblicazioni, corredate il più delle volte da appropriate figure, sono redatte con estrema chiarezza, riescono utili per gli adepti e in ogni caso orientative per i lettori.

Conviene ora fermarsi sull'attività accademica del *Ricci*. Il 16 dicembre 1936 il *Ricci*, primo vincitore di un concorso per la nomina a professore straordinario di analisi matematica algebrica e infinitesimale, fu chiamato alla Facoltà

di Scienze fisiche matematiche e naturali di Milano rimanendovi ininterrottamente fino all'ultimo giorno della *Sua* vita terrena.

Alla Scuola matematica milanese sorta nel 1924 con la fondazione di quella Università occorreano i Maestri e una biblioteca, ed è noto che nella capitale del Ducato convennero fin da principio maestri come *Gian Antonio Maggi* e *Oscar Chisini* e che la biblioteca grazie ad un lavoro continuo e paziente del *Ricci*, durato per oltre un trentennio, è ora così ricca e aggiornata da permettere ricerche bibliografiche in ogni campo della matematica.

Il *Ricci* svolse sempre a Milano corsi istituzionali e corsi di analisi superiore e con la *Sua* guida si formarono *Marco Cugiani* specialista di analisi numerica e di calcolo delle probabilità, *Delfina Roux* cultore della Teoria delle funzioni di variabile complessa, *Fulvia Skof* specializzata in Teoria dei numeri.

È pure merito del *Ricci* di aver scoperto l'eccezionale valore di *Enrico Bombieri* e di averlo messo in evidenza fin dai primi anni dei suoi studi universitari.

Nel periodo 1945-68 il *Ricci* tenne un corso di Analisi superiore presso l'Università di Parma e ivi attrasse agli studi matematici *Giovanni Prodi* divenuto poi professore di Analisi, prima a Trieste e successivamente a Pisa.

Dal 1937-38 fino all'ultimo anno della *Sua* attività, senza interruzioni, *Egli* tenne presso la Facoltà di Commercio dell'Università Bocconi di Milano un corso di matematica generale pienamente corrispondente alle finalità di quella Università.

E mi è caro aggiungere infine che nell'anno accademico 1944-45, a causa della Guerra, *Egli* si trasferì a Firenze, presso la casa paterna, e che in quel periodo tenne un corso di Istituzioni di Teoria dei numeri che per la sua struttura rappresentava un vero aggiornamento del classico volume di *P. G. Lejume-Dirichlet*.

Il *Ricci* si dedicò pure all'organizzazione dei matematici italiani. Dal 1964 al 1966 *Egli* fu presidente dell'UMI e ne conservò l'indirizzo, non corporativo, dato da *Salvatore Pincherle* fondatore della Società e continuato dai predecessori del *Ricci*, *Luigi Berzolari*, *Enrico Bompiani*, *Giovanni Sansone*, *Alessandro Terracini*.

Fu nello stesso tempo direttore del « Bollettino dell'UMI » da Lui ampliato e arricchito di estesi rapporti intesi a fare il punto su problemi di carattere generale e attuali.

La presidenza dell'UMI e la direzione del « Bollettino » *gli* imposero una notevole corrispondenza che per Lui, abituato a decidere dopo lunga riflessione, rappresentò un gravoso impegno.

Come cultore di Teoria dei numeri *Egli* fece parte a partire dal 1958 insieme a *Beniamino Segre* del Comitato di redazione degli « Acta Arithmetica » rivista di alto valore scientifico fondata dal grande matematico polacco *W. Sierpinski*.

Ebbe vari onori accademici. Nel giugno 1939 fu nominato socio corrispondente dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e nel giugno 1950 socio effettivo della stessa Accademia.

Nel marzo 1962 ebbe la nomina di Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Nell'agosto del 1957, come ho già avuto occasione di ricordare, fu eletto corrispondente della nostra Accademia. *Egli* non divenne Socio effettivo perchè la sezione matematica della Classe di Scienze fisiche e matematiche e naturali, come è stato più volte rilevato nelle nostre assemblee, per l'esiguità dei posti in organico, lascia fuori dell'Accademia giovani ed anziani matematici di altissimo prestigio.

Nella mia esposizione dell'opera scientifica del Ricci ho avuto occasione di ricordare alcune delle *Sue* doti umane, e mi accingo a concludere col parlarne.

Dal dicembre 1936 all'agosto 1972 il Ricci visse a Milano ma *Egli* conservò le caratteristiche di chi è nato e vissuto per tanti anni a Firenze all'ombra del Cupolone del Brunelleschi. I fiorentini si suddividono in due classi: gli arguti pungenti e i bonari. *Egli* apparteneva alla seconda classe. Nelle discussioni i Suoi consensi erano sempre pacati e nei dissensi, senza veemenza, respingeva o emendava le tesi non rispondenti alle *Sue* vedute con esempi e fatti sempre calzanti.

Egli, fondamentalmente ottimista, seguiva le vicende della vita con serenità. Anche del mal che lo afflisse negli ultimi due anni non si lamentò mai; io ricordo che nel 1971, poco prima del Suo primo internamento in una clinica, intervenne a Milano alla commemorazione del primo centenario della nascita di *Federigo Enriques* che era stato uno dei Suoi maestri.

Il mio discorso non è stato breve, ma avendo avuto con Lui rapporti scientifici e umani nell'arco di tempo 1919-1973, avrei censurato me stesso, se avessi ommesso di ricordare qualche tratto connesso alla Sua persona; vi confesso che rivedendo tutta la Sua opera e la Sua personalità io l'ho ancora più ammirato e amato.

Quel che pensavano di Lui i Suoi discepoli divenuti poi Suoi colleghi è sintetizzato da un passo della commossa commemorazione che di Lui fece *Marco Cugiani* l'8 novembre 1973 all'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

« I tratti di Lui che più mi colpirono fin dall'inizio e che più si affacciano al ricordo di oggi sono la Sua estrema chiarezza ed eleganza di esposizione, la Sua sicura padronanza del linguaggio, la Sua assoluta onestà, la sua serenità di giudizio, la Sua profonda bontà d'animo ».

E il *Cugiani* così chiudeva la Sua commemorazione:

« Il ricordo di questa nobile figura di scienziato, di questo illustre maestro di matematiche dottrine e di umana saggezza resterà certamente vivo, non solo nel cuore di quelli che come me ebbero la fortuna di vivergli accanto, ma di tutti coloro ... che ebbero la possibilità di rendersi conto ... del Suo lavoro di scienziato ... e delle *Sue* virtù di uomo ».

Alla signora *Livia Ricci* che fu Sua devota compagna e che per la Sua preparazione matematica poté valutare la grandezza del suo Giovanni, ai figli Eduardo, Lavinia e Stefano per i quali *Egli* fu esempio di altissime virtù familiari, all'odierno contributo di omaggio dell'Accademia io aggiungo il mio rinnovato dolore per la Sua dipartita.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI GIOVANNI RICCI

I Parte

1. *Le trasformazioni di Christoffel e di Darboux per le superficie rotonde, coniche e cilindriche. Alcune generazioni per rotolamento del cono e del cilindro di rotazione.* (Tesi di laurea, 15 dicembre 1925). « Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc. fis. e mat. », Vol. XV (1927), p. 64.
2. *Determinazione del massimo limite e del minimo limite della somma di funzioni periodiche continue, per la variabile indefinitamente crescente.* « Boll. U.M.I. », Vol. IX (1930) pp. 211-217.
3. *Sulle funzioni simmetriche di interi costituenti uno o più sistemi ridotti di resti, secondo un modulo composto.* « Ann. d. Univ. Toscane », Vol. XIII (1930), nuova serie, pp. 117-198.
4. *Sulle somme delle potenze simili degli interi naturali e sui coefficienti del fattoriale.* « Ibid », (1930) pp. 199-216.
5. *Un perfezionamento dei teoremi di Sylvester, N. Nielsen, Saalschütz, Lipschütz sui numeri di Bernoulli.* « Giornale di Matem. di Battaglini », Vol. 69 (1931), pp. 1-4.
6. *Sui coefficienti binomiali e polinomiali. Una dimostrazione del teorema di Staudt-Clausen sui numeri di Bernoulli.* « Giornale di Matem. di Battaglini », Vol. 69 (1931), pp. 9-13.
7. *Sulle funzioni simmetriche delle radici dell'unità secondo un modulo composto.* « Ann. Matem. », serie IV, tomo XI (1931), pp. 181-193.
8. *Due proprietà caratteristiche delle funzioni a rapporto incrementale limitato.* « Boll. U.M.I. », Vol. X (1931), pp. 131-134.
9. *On a generalization of the Wilson-Glaisher theorem.* « Bull. Amer. Math. Soc. », Vol. 38 (1932), pp. 393-397.
10. *Sulla convergenza assoluta delle serie trigonometriche.* « Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc. fis. e matem. », serie II, Vol. I (1932), pp. 399-412.
11. *Sulle successioni convergenti di funzioni discontinue.* « Giornale di Matem. di Battaglini », Vol. 70 (1932), pp. 175-189.
12. *Sui grandi divisori delle coppie di interi in posti corrispondenti di due progressioni aritmetiche. Applicazione del metodo di Brun.* « Ann. Matem. », serie IV, tomo XI (1932-33), pp. 91-110.
13. *Sull'aritmetica dei polinomi in a^x (a, x interi) a coefficienti interi.* « Boll. U.M.I. », Vol. XII (1933), pp. 222-228.
14. *Ricerche aritmetiche sui polinomi.* « Rend. Circolo Matem. di Palermo », tomo 57 (1933), pp. 433-475.
15. *Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica.* « Boll. U.M.I. », Vol. XII (1933), pp. 304-309.
16. *Su un teorema di Tchebychef-Nagel.* « Ann. Matem. », serie IV, Vol. XII (1933-34), pp. 295-303.
17. *Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali a coefficienti razionali e con i poli appartenenti ad una progressione geometrica.* « Comm. Math. Helvetici », Vol. 6 (1933-34), pp. 223-234.
18. *Sulla deformazione delle doppie infinità di sfere per flessione della superficie dei centri.* « Atti R. Istit. Veneto », tomo 93 1933-34, parte II, pp. 1535-1556.
19. *Una proprietà caratteristica delle congruenze di sfere di Ribaucour illimitatamente deformabili.* Verhandlungen des Internationaler Mathematiker-Kongress, Zürich 1932, Bd II, pp. 154-156. Riassunto « Giornale di Matem. di Battaglini », Vol. 72 (1934), pp. 220-234.
20. *Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tchebychef relativi alla progressione aritmetica.* « Boll. U.M.I. », Vol. XIII (1934), pp. 7-17.
21. *Un'osservazione su un classico teorema di Liouville relativo all'irrazionalità del numero e .* « Boll. U.M.I. », Vol. XIII (1934), pp. 89-92.

22. *Ricerche aritmetiche sui polinomi*, II. (*Intorno a una proposizione non vera di Legendre*). « Rend. Circ. Matem. Palermo », tomo 58 (1934), pp. 190-207.
23. *Sulla moltiplicazione delle serie*. « Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc. fis. e matem. », serie II, Vol. III (1934), pp. 373-392.
24. *Sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni semicontinue*. « Boll. U.M.I. », Vol. XIII (1934), pp. 212-216.
25. *Sui teoremi Tauberiani*. Memoria I. « Ann. Matem. », Serie IV, Vol. XIII (1934-1935), pp. 287-308.
26. *Sul settimo problema di Hilbert*. « Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc. fis. e matem. », serie II, Vol. IV (1935), pp. 341-372.
27. *Sul settimo problema di Hilbert*. (Nota preventiva). « Boll. U.M.I. », Vol. 14 (1935), pp. 22-26.
28. *Sull'aritmetica additiva degl'interi liberi da potenze*. « The Tôhoku Mathem. Journal », Vol. 41 (1935), parte I, pp. 20-26.
29. *Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann*. (Nota preventiva). « Boll. U.M.I. », Vol. 15 (1936), pp. 183-187.
30. *Su una formula di K. Petr per il calcolo numerico degli integrali definiti*. « Ann. Matem. », Serie IV, Vol. 15 (1936-37), pp. 187-196.
31. *Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann*. (Prima memoria). « Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Cl. Sc. fis. e mat. », Serie II, Vol. 6 (1937), pp. 71-90. *Idem* (Seconda memoria), pp. 91-116.
32. *Sull'irrazionalità del rapporto della circonferenza al diametro*. « Atti del II Congresso dell'U.M.I. », Bologna, aprile 1940. Roma 1942, pp. 146-151.
33. *Sul coefficiente di Viggo Brun*. « Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie III, Vol. 7 (1953), pp. 133-151.
34. *Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici*. « Boll. U.M.I. », Serie III, Vol. 9 (1954), pp. 126-135.
35. *Sur la différence entre nombres premiers consécutifs*. « Proceed. Inter. Math. Congress », Amsterdam, Vol. II, September 1954, pp. 56-57.
36. *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*. « Riv. di Matem. Univ. Parma », Vol. 5 (1954), pp. 3-54.
37. *Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi*. « Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. e mat. », Serie VIII, Vol. XVII (1954), pp. 192-196 e pp. 347-351.
38. *Maggiorazione del resto delle serie di potenze sul cerchio di convergenza*. « Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie III, Vol. 8 (1954), pp. 121-131.
39. *Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry*. « Ann. di Matem. pura e appl. », Serie IV, Vol. XXXVIII (1955), pp. 1-31.
40. *Sulla partizione degli interi in addendi primi col procedimento del residuo minimo*. « Boll. U.M.I. », Serie III, Vol. X (1955), pp. 1-10.
41. *Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti*. « Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. e mat. », Serie VIII, Vol. XVIII (1955), pp. 27-31.
42. *Fluttuazione e punti singolari delle serie di potenze*. « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lettere », Vol. LXXXVIII (1955), pp. 3-24.
43. *Sull'insieme delle serie di potenze non prolungabili*. « Giornale di Matem. di Battaglini », Serie V, Vol. LXXXIII (1955), pp. 5-11.
44. *Una osservazione sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze di norma finita*. « Boll. U.M.I. », Serie III, Vol. X (1955), pp. 147-153.
45. *Su un problema di massimo per le funzioni maggioranti delle serie di potenze*. « Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. e mat. », Serie VIII, Vol. XVIII (1955), pp. 609-613.
46. *Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune (I-II)*. « Rend. Matematica e sue appl. », Serie V, Vol. 14 (1955), pp. 602-632; *Idem*, « Boll. U.M.I. », Serie III, Vol. 10 (1955), pp. 439-452.

47. *Sull'andamento delle funzioni maggioranti delle serie di potenze.* « Annali di Matem. pura e appl. », Serie IV, Vol. 40 (1955), pp. 285-306. (Scritti matematici offerti a Mauro Picone nel suo LXX compleanno, Bologna 1955).
48. *Recherches sur l'allure de la suite $\{(\phi_{n+1} - \phi_n)/\log \phi_n\}$.* Colloque sur la théorie des nombres. CBRM, Bruxelles (1955), pp. 93-106.
49. *Complementi a un teorema di H. Bohr riguardante le serie di potenze.* « Rev. Unión Matem. Argentina », Vol. 17 (1955), pp. 185-195.
50. *Sull'insieme dei valori di condensazione del rapporto $(\phi_{n+1} - \phi_n)/\log \phi_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).* « Riv. Matem. Univ. Parma », Vol. 6 (1955), pp. 353-361.
51. *Sul resto delle serie di potenze alla periferia del cerchio di convergenza.* (Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani). Edit. Zuffi, Bologna (1957), pp. 233-242.
52. *Sul teorema di Carathéodory-Bohr-Banach riguardante la copertura secondo Vitali.* « Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. mat. », Serie VIII, Vol. 35 (1963), pp. 401-408.
53. *Sui grandi divisori primi dei polinomi di esponenziali a coefficienti interi.* « Atti del VII Congresso dell'U.M.I. », Genova 1963. Edit. Cremonese, Roma (1965), pp. 344-345.
54. *Sulle funzioni aritmetiche additive lungo semigruppì.* Estratto da « Atti dell'VIII Congresso dell'U.M.I. », Trieste 2-7 ottobre 1967. Edit. Azzoguidi, Fologna (1969), p. 305.

II Parte

1. BAGNERA G., *Lezioni sopra la teoria delle funzioni analitiche*, raccolte dal dr. Ricci. Anno Scolastico 1926-1927. Stamp. Tip. Litografico Sampaolesi, Roma.
2. *Alcuni recenti risultati alla congettura di Goldbach.* « Atti del I Congresso dell'U.M.I. », aprile (1937), Bologna (1938), pp. 158-160.
3. *Ricerche italiane di Analisi durante l'anno XV E. F.* « Atti del XXVI Riunione della SIPS », Vol. 2 (1938), pp. 9-46.
4. *Il contributo italiano al progresso dell'analisi, negli ultimi cento anni.* Analisi. Estratto dal vol. I dell'opera « Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939 ». Roma, Soc. Ital. Progresso Scienze, XVII E. F. (1939), pp. 55-124.
5. *Recenti risultati nel campo dell'Aritmetica. Il problema di Goldbach.* « Rend. Sem. Matem. e fis. Milano », Vol. 31 (1939), pp. 204-226.
6. *Sull'aritmetica dei polinomi a valori interi (marzo 1941).* Rubrica « Problemi, risultati e discussioni », 81. « Rend. Matem. », Serie V, Vol. 2 (1940), pp. 125-126.
7. *Aritmetica additiva.* Corsi del R. Ist. Naz. Alta Matem. Roma Anno Acc. 1940-41, XIX Stab. Edit. V. Ferri, Roma (1941), (Questo corso è rimasto interrotto).
8. Rubrica « Questioni proposte ». « Period. Matem. », Serie IV, Vol. 22 (1942), p. 55. Soluzione. « Period. di Matem. », Serie IV, Vol. 23 (1943), pp. 55-57.
9. *Problemi secolari e risposte recenti nel campo dell'aritmetica.* « Atti d. Convegno matem. », Roma 8-12 novembre 1942. Roma (1954), pp. 91-131.
10. *Figure, reticoli e computo di nodi.* « Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano », Vol. XIX (1948), pp. 165-205.
11. *Il teorema fondamentale sulla distribuzione dei numeri primi.* « Il Filomate », Vol. 1, (1948), pp. 1-14, 90-99.
12. *Aritmetica.* Voce dell'Enciclopedia Italiana Treccani. Appendice II. (1948), pp. 251-252.
13. Postilla alla fine della Nota: RICCARDO CANTONI, *Una proposizione aritmetica dimostrata in modo sintetico.* « Period. di Matem. », Serie IV, Vol. 27 (1949), pp. 182-186. (La postilla senza titolo, si trova alla fine, cioè alle pp. 184-186).
14. *Elementi di teoria dei numeri.* Articolo I in « Repertorio di Matematiche », a cura di M. Villa, CEDAM, Padova (1951), pp. 1-61. (riprodotta la prima parte del n. 30, pp. 32-34 nella rubrica « Antologie » di Archimede, Vol. 3 (1951), pp. 208-209).

15. *Numeri algebrici e numeri trascendenti*. Articolo V in « Repertorio di Matematiche » a cura di M. Villa, CEDAM, Padova (1951), pp. 147-155.
16. *La scuola matematica pisana dal 1848 al 1948*. « Riv. di Matem. Univ. Parma », Vol. 2 (1951), pp. 155-174.
17. Commento alla memoria di G. B. Autonelli nell'anno 1886: « *Sulla teoria matematica della Economia politica*. » « Giornale degli Economisti e Annali di Economia », Anno X (1951) (nuova serie), pp. 264-297, 345-385.
18. *La discontinuità come essenza della matematica*. (Radio lettura). « Period. di Matem. », Serie IV, Vol. 29 (1951), pp. 249-254. Inserito nel volumetto « *Natura facit saltus* » - La certezza del caso - Quaderni della Radio N. 23 (1952), pp. 34-40.
19. *La differenza di numeri primi consecutivi*. (Conferenza tenuta il 9 maggio 1950). « Rend. Sem. Matem. Torino », Vol. 11 (1951-52), pp. 149-200. Errata corrige, *ibid.*, Vol. 12 (1952-53), p. 315.
20. *Funzioni aritmetiche. Proprietà asintotiche. Aritmetica analitica*. « Archimede », Anno IV (1952), pp. 1-7, 98-104, 148-155.
21. Cenno introduttivo a « L. Bianchi, Opere », Vol. I. Parte I, pp. 77-82. Edit. Cremonese, Roma (1952).
22. *Questioni 501 e 502*. « Period. di Matem. », Serie IV, Vol. XXX (1952), pp. 281-282.
23. *Funzioni aritmetiche e quasi-asintoticità*. (Conferenza tenuta il 24 marzo 1953). « Rend. Sem. Mat. e fis. Milano », Vol. XXIV (1952-53), pp. 88-106.
24. *Il caso visto dal matematico*. « Archimede », Anno V (1953), pp. 116-119. Inserito nel volumetto « *Natura facit saltus* » - La certezza del caso - Quaderni della Radio N. 23 (1952), pp. 55-61.
25. *Aspetti moderni della matematica*, (Radio lettura). « Archimede », Anno V (1953), pp. 245-247.
26. *Sui punti critici degli elementi analitici*. (Conferenza tenuta il 19 febbraio 1954). « Le matematiche », Catania, Vol. IX (1954), pp. 34-81; Errata Corrige p. 183.
27. *Aritmetica additiva. Aspetti e problemi*. « Conf. Sem. di Matem. », Bari, N. 7 (1954), p. 32.
28. *Sul reticolo dei punti aventi per coordinate i numeri primi*. CIME. Corso di teoria dei numeri, Varenna, agosto (1956), p. 5.
29. *Geometria metrica dei numeri e distribuzione dei numeri primi*. (Riassunto). « Atti del V Congresso dell'U.M.I. », Pavia-Torino 1956. Edit. Cremonese, Roma (1956), p. 256.
30. Recensione: *In memoria di Giuseppe Peano*, Cuneo 1955, p. 116. « Boll. U.M.I. », Serie III, Vol. 12 (1957), pp. 104-109.
31. *Nozioni di calcolo superiore*. In « La Scuola in Azione ». Notiziario per gli allievi, San Donato Milanese (1958-59). 2. pp. 23-32; 4. pp. 12-14; 5. pp. 102-110.
32. La parola di un professore. Giovanni Ricci. In « La Scuola in Azione ». E.N.I. Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi. Notiziario per gli allievi San Donato Milanese, Anno Acc. 1958-59, 1. pp. 3-5.
33. Un'osservazione sulla nota: A BATTAGLIA, *Sulle equazioni indeterminate $x^{2n} + y^{2n} = z^2$* . « Boll. U.M.I. », Serie III, Vol. 14 (1959), pp. 499-500.
34. *Nozioni di Calcolo Superiore*. In « La Scuola in Azione ». Notiziario per gli allievi. San Donato Milanese. 1959-1960. E.N.I. Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi. 2, pp. 59-64; 3, pp. 66-74; 4, pp. 82-88; 5, pp. 102-109; 7, pp. 70-81; 8, pp. 22-56.
35. *Nozioni di calcolo superiore (Sintesi dei corsi)*. *Matematica e Matematica applicata*. Allegato al Notiziario N. 5 de « La scuola in Azione ». E.N.I. Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi (1960-61), pp. 3-107.
36. *Momenti decisivi del pensiero matematico negli ultimi due secoli*. (Discorso inaugurale). « Rend. Ist. Lomb., Parte Gen. e Atti Uff. », Vol. 95 (1961), pp. 33-66.
Idem, « Period. di Matem. », Serie IV, Vol. 39 (1961), pp. 201-235.
Idem, « Responsabilità del Sapere », Vol. 59 (1961), pp. 5-47 (edizione ritoccata).
Idem, « Riv. di Matem. Univ. Parma », Serie II, Vol. 3 (1962), pp. 213-241.

- Idem*, «La Scuola in Azione», Scuola Enrico Mattei di Studi Superiori sugli Idrocarburi. Anno 1963-1964, fasc. 10 (2 marzo 1964), pp. 5-44.
37. *Introduzione alla matematica generale*. «La Goliardica», Milano, III ed. (1961).
 38. *Analisi matematica. Appunti per uso degli Studenti*. Vol. I, Parte I Libreria Editrice, Milano (1962) (ed. precedente (1959), (1961)).
 39. *Analisi matematica. Appunti per uso degli Studenti*. Vol. I, Parte II Libreria Editrice, Milano (1962) (ed. precedente (1961)).
 40. *Gruppi. Tralicci. Campi numerici*. «La Matematica negli Istituti Tecnici Commerciali». Lezioni tenute nei corsi di aggiornamento per gli insegnanti. M.P.I., Roma 1962, pp. 441-585.
 41. *Programmazione lineare*. Contenuto in «Per un insegnamento moderno della matematica negli Istituti Tecnici». Cap. XIII. Edit. Patron, Bologna (1963), pp. 239-272.
 42. *Il pensiero matematico, impronta latente nel mondo d'oggi*. «Atti del VII Congresso Unione Matematica Italiana», Genova (1963), pp. 21-94.
 44. *Algebra moderna*. Voce in «Galileo». Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche. Vol. 1 (1964), pp. 202-215. SADEA, Firenze (1964).
 43. *Elementi sulle serie di Fourier*. Cap. XIV: «Per un insegnamento moderno della Matematica negli Istituti Tecnici». Edit. Patron, Bologna (1963), pp. 313-361.
 45. *Aritmetica*. Voce in EST. «Enciclopedia della Scienza e della Tecnica». Mondadori, vol. 2 (1964), pp. 19-24, II edizione, (ed. prec. 1963).
 46. *Fermat (Problemi di)*. Voce in EST. «Enciclopedia della Scienza e della Tecnica». Mondadori, vol. 4 (1964), pp. 797-799 (ed. precedente 1963).
 47. *Indeterminata, analisi*. Voce in EST. «Enciclopedia della Scienza e della Tecnica». Mondadori, vol. 5 (1964), pp. 801-802 (ed. precedente 1963).
 48. *Funzioni*. Voce in «Galileo». «Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche». SADEA, vol. 4 (1965), pp. 428-451.
 49. *Integrale, calcolo. Evoluzione e aspetti moderni*. Voce in «Galileo». «Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche». SADEA, vol. 5 (1965), pp. 379-387.
 50. *Numeri primi*. Voce in «Galileo». «Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche». SADEA, vol. 7 (1965), pp. 156-159.
 51. *Numeri (teoria dei)*. Voce in «Galileo». «Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche». SADEA, vol. 7 (1965), pp. 159-164.
 52. *Spazi*. Voce in «Galileo». «Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche». SADEA, vol. 8 (1966), pp. 480-489.
 53. *Strutture algebriche*. Voce in «Galileo», «Enciclopedia delle Scienze e delle Tecniche». SADEA, vol. 9 (1966), pp. 53-64.
 54. UGO BROGGI. *Cenno necrologico*. «Rend. Ist. Lomb.», Parte Gen. e Atti Uff., vol. 100 (1966), pp. 94-97.
 55. *Elementi sulle serie di Fourier e sulla trasformazione di Fourier*. Cap. X in «Matematica moderna nelle Scuole secondarie superiori», a cura di M. Villa. Edit. Patron, Bologna (1966), pp. 369-436.
 56. *Programma lineare*. Cap. XI in «Matematica moderna nelle Scuole secondarie superiori», a cura di M. Villa. Edit. Patron, Bologna (1966), pp. 439-484.
 57. *Funzioni aritmetiche additive e condizioni unilaerali*. «Period. di Matem.», Serie IV, Vol. 46 (1968), pp. 500-509.
 58. *Avvicinamento all'Algebra astratta*. Estratto dal vol. 1 del «Repertorio di Matematiche», a cura di M. Villa. CEDAM, Padova (1969), Vol. I, pp. 1-41.
 59. *Elementi di teoria dei numeri*. Articolo I in «Repertorio di Matematiche», a cura di M. Villa, CEDAM, Padova (1971), vol. II, 2 ediz., pp. 1-32.
 60. *Numeri algebrici e numeri trascendenti*. Articolo II nel vol. II del «Repertorio di Matematiche», a cura di M. Villa. CEDAM, Padova (1971), 2 ediz., pp. 33-43.
 61. In collaborazione con L. DE MICHELE, G. L. FORTI, *Esercizi di Analisi Matematica*, I. Edit. Viscontea, Milano (1973).